有界対称領域の各境界に付随するユニタリ表現と核関数 (群の表現と調和解析)

井上, 透

数理解析研究所講究録
368巻 1979年 1-22

有界対称領域の各境界に付随するユニタリ表現と核関数

山口大理学部　井上　透

§1 序

$D = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1 \}$，$B = \partial D = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1 \}$ とすれば群 $G = SU(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} ; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ は一次分数変換

$$z \longrightarrow g\cdot z = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \qquad g = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

としてDおよびBと推移的に作用する。従って $K = \{ g \in G \,;\, g\cdot 0 = 0 \}$，$P = \{ g \in G \,;\, g\cdot 1 = 1 \}$ とおけば $D = G/K$，$B = G/P$ と書ける。KおよびPの既約ユニタリ表現の同値類全体を $\hat{K}$，$\hat{P}$ とすれば、$\hat{K}$（の部分集合）に対応してGの *discrete series* の表現が $D = G/K$ 上の正則（または反正則）関数からなる Hilbert 空間上で実現でき，$\hat{P}$ に対応してGの連続主系列の表現が $B = G/P$ 上の2乗可積分関数の空間 $L^2(B)$ 上で実現できる。Gの連続主系列の表現は、ただ一つの例外（それを V_1 とする）を除きすべて既約で V_1 は $g \in G$ に対し正則写像 $z \to g\cdot z$ の点 u での complex

Jacobian を $J(g,u)$ (したがって $g=\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ であれば $J(g,u)=(\bar{b}u+\bar{a})^{-2}$) とすれば

$$(1.1)\qquad (V_1(g)f)(u) = J(g^{-1},u)^{\frac{1}{2}} f(g^{-1}\cdot u), \qquad f\in L^2(B),\ u\in B$$

で与えられる。所謂 G の holomorphic discrete series は $n\geq 2$ なる整数で parametrize され n に対応する表現を T_n とすれば T_n は Hilbert 空間

$$(1.2a)\qquad H_n = \left\{ f\in \mathcal{O}(D)\ ;\ \int_D |f(z)|^2(1-|z|^2)^{n-2}\,dx\,dy < \infty \right\}$$

($z=x+iy$, $\mathcal{O}(D)$ は D で正則な関数全体) 上で実現でき、G の作用は

$$(1.2b)\qquad (T_n(g)f)(z) = J(g^{-1},z)^{\frac{n}{2}} f(g^{-1}\cdot z)$$

で与えられる。ところで (1.2ab) において H_1, T_1 を同様に定義すれば $H_1=\{0\}$ となり自明な表現しか得られない。しかし $H^2(D)$ を D の Hardy 空間 i.e.

$$H^2(D) = \left\{ f\in\mathcal{O}(D)\ ;\ \sup_{0<r<1}\int_B |f(ru)|^2\,du < \infty \right\}$$
$$\left(\cong \mathcal{O}(\bar{D}) \text{ のノルム } \|f\|^2 = \left(\int_B |f(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} \text{ に関する完備化} \right)$$

(du は B の Lebesgue 測度) とすれば $H^2(D)\neq\{0\}$ で T_1 を (1.2b) におけるように定義すれば T_1 は $H^2(D)$ 上での既約ユニタ

り表現となる。しかも $H^2(D)$ は各関数にその境界値を対応させることにより $L^2(B)$ の閉部分空間として埋めこめるから T_1 と (1.1) における V_1 の作用をみれば表現 $(T_1, H^2(D))$ は例外的な表現 $(V_1, L^2(B))$ の部分表現とユニタリ同値になることがわかる。このような事情から $(T_1, H^2(D))$, $(V_1, L^2(B))$ は特に興味のある表現ということができる。ところで単位円板 D は最も簡単な有界対称領域の例であるが、D を $\mathbb{C}^n$ の有界対称領域、すなわち D は $\mathbb{C}^n$ の有界領域で各 $z \in D$ に対し z を孤立不動点とする D の正則同相 σ_z で $\sigma_z^2 = 1$ となるものが存在するとすればよく知られているように D は等質空間となり $D = G/K$ (G は半単純 Lie 群、K は極大コンパクト部分群)と表わされる(逆に G/K を非コンパクト型 Hermite 対称空間, $\dim_{\mathbb{C}} G/K = n$ とすれば G/K は $\mathbb{C}^n$ のある有界領域 D と正則同相). G の D での作用は D の $\mathbb{C}^n$ での閉包 $\bar{D}$ に連続的に拡張され、D の境界 $\partial D = \bar{D} - D$ は $\mathrm{rank}\, D = r$ とすれば r 個の G 軌道 $B_1, \cdots, B_r$ の disjoint union になっていて、それらのうち次元の一番小さいのはコンパクト(それ以外は非コンパクト)で D の Silov 境界である. これら D の境界 $B_1, \cdots, B_r$ の詳しい構造は Wolf-Korányi [7] により分かっているが、本稿では D の各境界 B_i に付随するベクトル値 Hardy type Hilbert 空間とその上での G の既約ユニタリ表現が構成され、それらの表現が境界値をとる操作に

より，ある連続系列の表現に埋めこめ，従ってその連続系列の表現が可約であることの概略を示す。さらにそれらHardy type Hilbert空間は（作用素値）再生核関数を持つことが示されるが，そのexplicit formula（特別の場合としてDのCauchy-Szegö核関数のそれが得られる）および核関数による積分作素のLie群論的表示についても触れる（詳細は[3]を参照されたい）。

Knapp-Okamoto [4] においてholomorphic discrete seriesのlimitがG/T（Tはコンパクト Cartan部分群）上の正則line bundleの正則切断からなるあるHilbert空間上で構成されているが，これらの表現達はDの実余次元1の境界に対応して構成されるものとユニタリ同値になっている。さらにRossi-Vergne [8] はG/Kをtype IIのSiegel領域として実現し，その各境界に対し一つづつスカラー値Hardy type空間とその上でのGの表現を構成しているが，それらと同値な表現も特別の場合として得られる。

§2 準備

Gを連結な線型単純Lie群，Kをその極大コンパクト部分群とし，G/KはG不変複素構造を持つと仮定する。従ってKは1次元の中心をもちGのコンパクトCartan部分群Tを$T\subset K$なるように取れる。G, K, TのLie環を$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{t}$としそれらの

複素化を $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{t}_c$ とする。仮定から G は $\mathfrak{g}_c$ を Lie 環としてもつ連結 Lie 群 G_c の部分群とみなせる。Φ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ に関するルート系とし Φ_c, Φ_n をそれぞれコンパクト，非コンパクトルートの全体とする。従って $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を K に対応する Cartan 分解とすれば

$$\mathfrak{k}_c = \mathfrak{t}_c + \sum_{\alpha \in \Phi_c} \mathfrak{g}_c^\alpha, \quad \mathfrak{p}_c = \sum_{\alpha \in \Phi_n} \mathfrak{g}_c^\alpha$$

となっている（$\mathfrak{g}_c^\alpha$ はルート α に対する固有空間）。$\alpha \in \Phi$ に対し $H_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ を $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \mu(H_\alpha)$，$\forall \mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$，をみたすようにとり、ルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_c^\alpha$ を $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$，さらに $\alpha \in \Phi_n$ のときは $\overline{X}_\alpha = X_{-\alpha}$（bar は $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役）なるようにとる。G/K に関する仮定から Φ の順序で"任意の$\overset{2つの}{}$非コンパクト正ルートの和はルートでない"をみたすものが存在する。そのような順序を以下一つ固定して，正ルートの全体を Φ^+，$\Phi_c^+ = \Phi^+ \cap \Phi_c$，$\Phi_n^+ = \Phi^+ \cap \Phi_n$ とする。このとき $\mathfrak{p}^+ = \sum_{\alpha \in \Phi_n^+} \mathfrak{g}_c^\alpha$，$\mathfrak{p}^- = \sum_{\alpha \in \Phi_n^+} \mathfrak{g}_c^{-\alpha}$ とおけば $\mathfrak{p}_c = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-$ で $\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-$ は可換な部分環である。$\mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-$ に対応する G_c の連結部分群を K_c, P^+, P^- とすれば K_c は $P^\pm$ を normalize して $K_cP^\pm$ は G_c の放物部分群である。G_c/K_cP^- において原点の G 軌道は開集合で $G \cap K_cP^- = K$ よりそれは G/K と同一視できる。従って埋めこみ $G/K \subset G_c/K_cP^-$ により G/K には複素構造がはいる。$\Omega = P^+K_cP^-$ とすれば Ω は G_c の稠密な開集合でしかも G を含んでいる。$\mathfrak{p}^+ \times K_c \times \mathfrak{p}^-$ から G_c への写像を $(X, k, Y) \to \exp X \cdot k \cdot \exp Y$ で定義すればこの写像は Ω 上への正則同相であ

る。従って $g\in\Omega$ は

(2.1) $\qquad g=\pi_+(g)\cdot\pi_0(g)\cdot\pi_-(g)\,,\qquad \pi_0(g)\in K_c\,,\ \pi_\pm(g)\in P^\pm$

と一意的に表わされる。そこで、$\zeta:\Omega\to\mathfrak{p}^+$ を $\zeta(g)=\log\pi_+(g)$ で定義すれば、ζ は G/K から $\zeta(G)\equiv D\subset\mathfrak{p}^+$ への正則同相を引き起こし D は $\mathfrak{p}^+$ の有界領域になっている。この D 上での G の作用は

(2.2) $\qquad g\cdot z=\zeta(g\exp z)\,,\quad g\in G,\ z\in D$

で与えられる。

有限次元複素ベクトル空間 E 上での K_c の正則表現 τ に対し type τ の automorphic factor $J_\tau: G\times D\to GL(E)$ を

(2.3) $\qquad J_\tau(g,z)=\tau(\pi_0(g\exp z))$

で定義する (π_0 は (2.1) で定義したもの)。このとき J_τ は次の性質をもっている。

$J_\tau(g,z)$ は $g\in G$ に関し C^∞ で $z\in D$ に関し正則

(2.4) $\qquad J_\tau(g_1g_2,z)=J_\tau(g_1,g_2\cdot z)J_\tau(g_2,z)\,,\quad g_1,g_2\in G;\ z\in D.$

$J_\tau(k,z)=\tau(k)\,,\quad k\in K,\ z\in D$

<u>注意</u> (2.2) と (2.3) における $g\cdot z$, $J_\tau(g,z)$ は $g\exp z\in\Omega=P^+K_cP^-$ である $g\in G_c$ と $z\in\mathfrak{p}^+$ に対しても定義できる。特に $g\in G$, $z\in\partial D$ に対し $g\cdot z$ が定義でき $g\cdot z\in\partial D$.

一次独立な $\alpha,\beta\in\Phi$ は $\alpha\pm\beta\notin\Phi$ のとき strongly orthogonal といわれるが、Φ_n^+ の strongly orthogonal な極大集合

(2.5) $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r\}$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_r$, $r = \mathrm{rank}\, G/K$

をγ_1はΦの最高ルート, γ_{j+1}は$\gamma_1, \cdots, \gamma_j$に strongly orthogonal であるもののうち最高なものとなるようにとり$H_{\gamma_j}, X_{\gamma_j}, X_{-\gamma_j}$をそれぞれ$H_j, X_j, X_{-j}$と略記する。各$i = 1, \cdots, r$に対し(部分) Cayley 変換 $c_i \in G_{\mathbb{C}}$ を

$$c_i = \prod_{j=1}^{i} \exp \frac{\pi}{4}(X_{-j} - X_j)$$

で定義する。(2.2)における記法を用い $o_i = c_i \cdot o$ (oは$\mathfrak{p}^+$の原点), $B_i = G \cdot o_i$ (o_iのG軌道) とおけば

$$o_i \in \partial D \ , \ \partial D = \bigcup_{i=1}^{r} B_i \quad (\text{disjoint union})$$

となる。しかも各B_iは階数が$r-i$である既約な有界対称領域に正則同相な$\mathfrak{p}^+$の複素部分多様体(これらはB_iの holomorphic arc component と呼ばれる, B_rのそれは一点のみ)の disjoint union となり、その分割はG同変的である。今o_iを含むB_iの holomorphic arc component をC_iとすればGの半単純部分群G_iが存在し$C_i = G_i \cdot o_i$となる。従って$K_i = \{g \in G_i ; g \cdot o_i = o_i\}$とおけば$C_i \cong G_i/K_i$。また$S_i = \{g \in G ; g \cdot o_i = o_i\}$, $P_i = \{g \in G ; g \cdot C_i = C_i\}$とおけば$P_i$は$G$の極大放物部分群で$C_i$に関係する一つの Langlands 分解 $P_i = M_i A_i N_i$ を持ち $L_i = M_i \cap S_i$ とおけば$S_i = L_i A_i N_i$となっている。

注意 $S_i \subset P_i$ ($S_r = P_r$), $B_i = G/S_i$ より B_iはG/P_i上の fibre bundle でその fibre はB_iの holomorphic arc component.

§3　表現の構成

まずこれから構成しようとする表現をparametrizeする集合$\mathfrak{F}_i(G)$を定義する。

$$W(G)=\left\{\lambda\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}^*;\ \begin{array}{l} e^{\lambda}\ \text{は}\ T\ \text{上 well defined}\\ (\lambda,\alpha)\geqq 0\quad \forall\,\alpha\in\Phi_c^+\end{array}\right\}$$

とし（従って　$\lambda\in W(G)\iff\lambda$ は K のある既約表現の最高weight),

$$\mathfrak{F}_i(G)=\left\{\lambda\in W(G);\ \begin{array}{l}(\lambda,\gamma_1)=(\lambda,\gamma_i)\\ (\lambda+\rho,\gamma_1+\cdots+\gamma_i)=0\end{array}\right\},\quad 1\leqq i\leqq r$$

とおく、ただし $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_r\}$ は（2.5）で定義したもので $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$.

<u>注意</u> (1) $i=1$ のとき $\mathfrak{F}_1(G)=\{\lambda\in W(G);\ (\lambda+\rho,\gamma_1)=0\}$ となり，従ってこれは Knapp-Okamoto [4] で考察された場合である。

(2) $\mathfrak{F}_i(G)$ の元はweightの基本系を用いて表わすことができる。

(3) G の適当な有限被覆 $\tilde{G}$ をとり $\mathfrak{F}_i(\tilde{G})$ も同様に定義すれば，任意の $1\leqq i\leqq r$ に対し $\mathfrak{F}_i(\tilde{G})\neq\phi$ で $i\neq r$ なら $\mathfrak{F}_i(\tilde{G})$ は無限集合となる。また"i が偶数で G が $Sp(n,\mathbb{R})$, $SO_0(2n+1,2)$ に局所同型"以外のときは、$\mathfrak{F}_i(\tilde{G})\neq\phi$ なる $\tilde{G}$ を線型群としてとれる。

(4) 各 $i=1,\cdots,r$ に対し $d(\lambda)=1$ なる $\lambda\in\mathfrak{F}_i(\tilde{G})$ がただ一つ存在する（$d(\lambda)$ は λ を最高weightとする $\tilde{K}$（$=\tilde{G}$ の極大コンパクト部分群）の表現のdgreeすなわち表現空間の次元）。これら λ

に対応する $\tilde{G}$ の表現は Rossi-Vergne [8] が $\tilde{G}/\tilde{K}$ を Siegel 領域として実現し、その各境界に対し一つづつ構成した表現と同値になる。

i, $1 \leqq i \leqq r$, と $\lambda \in \mathcal{F}(G)$ を固定し次のように定義する.

τ_λ : λ を最高 weight とする K_c の正則表現(これは K_cP^- の正則表現に P^- 上自明として拡張されるがそれも τ_λ とする)

E_λ : τ_λ の表現空間 ($\tau_\lambda(K)$ 不変内積を入れておく)

e_λ : $|e_\lambda| = 1$ なる τ_λ の最高 weight ベクトル

$\tilde{\lambda}$: λ の $\mathfrak{h}_{i,c}$ への制限 ($\mathfrak{h}_{i,c}$ は $\mathfrak{h}_{i,c} \subset \mathfrak{h}$ なる $\mathfrak{g}_{i,c}$ の Cartan subalg)

$E_{\tilde{\lambda}}$: $\{\tau_\lambda(k)e_\lambda \,;\, k \in K_{i,c}\}$ で張られる E_λ の部分空間

$\tau_{\tilde{\lambda}}$: τ_λ によって引き起こされる $K_{i,c}$ の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現

<u>(3.1) 補題</u>　$K_{i,c}$ の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現 $\tau_{\tilde{\lambda}}$ は既約.

G の o_i での固定群 S_i は $S_i = G \cap c_i K_c P^- c_i^{-1}$ だから S_i の E_λ での表現 $\tau_\lambda^{(i)}$ を

$$\tau_\lambda^{(i)}(s) = \tau_\lambda(c_i^{-1} s c_i), \qquad s \in S_i$$

により定義することができる。さて $S_i = L_i A_i N_i$ であったが

<u>(3.2) 補題</u>　$\tau_\lambda^{(i)}(l)$ $(l \in L_i)$ の E_λ での作用はユニタリで $E_{\tilde{\lambda}}$ を不変にする。

補題(3.2)より L_i の $E_{\tilde{\lambda}}$ 上での表現 ${}'\tau_\lambda^{(i)}$ を

$${}'\tau_\lambda^{(i)}(l) = \tau_\lambda^{(i)}(l)\big|_{E_{\tilde{\lambda}}}, \quad l \in L_i$$

で定義できる. $\nu \in \mathfrak{a}_i^*$ ($\mathfrak{a}_i$ は A_i の Lie 環) に対し $S_i = L_i A_i N_i$ の

$E_{\tilde\lambda}$ 上での表現 $'\sigma_{\lambda,\nu}$, $\sigma_{\lambda,\nu}$ を

$$'\sigma_{\lambda,\nu}(lan) = e^{\sqrt{-1}\nu}(a)\,'\tau_\lambda^{(i)}(l)$$

$$\sigma_{\lambda,\nu}(lan) = e^{\rho_i+\sqrt{-1}\nu}(a)\,'\tau_\lambda^{(i)}(l), \qquad lan \in L_iA_iN_i$$

で定義する。ただし $\rho_i \in \mathfrak{a}_i^*$ で $\rho_i(H) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(ad(H)|_{\mathfrak{n}_i})$ ($H \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_i$ は N_i の Lie 環)。$'\sigma_{\lambda,\nu}$ は既約ユニタリである。これを G の表現に誘導したものを

$$U_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{S_i \uparrow G}\, '\sigma_{\lambda,\nu}$$

とすれば、$U_{\lambda,\nu}$ の表現空間として

$$L^2(G,\sigma_{\lambda,\nu}) \equiv \left\{ f: G \to E_{\tilde\lambda}\ ;\ \begin{array}{l} f \text{ は Borel 可測} \\ f(gs) = \sigma_{\lambda,\nu}(s)^{-1}f(g),\ g\in G,\ s\in S_i \\ \int_{K\times G_i}|f(kg_i)|^2\,dk\,dg_i < \infty \end{array} \right.$$

をとることができ、$U_{\lambda,\nu}$ の $L^2(G,\sigma_{\lambda,\nu})$ での作用は左移動 $(U_{\lambda,\nu}(g)f)(g') = f(g^{-1}g')$ で $\forall \nu \in \mathfrak{a}_i^*$ に対し $U_{\lambda,\nu}$ は G のユニタリ表現である。$U_{\lambda,0}$, $\sigma_{\lambda,0}$, $L^2(G,\sigma_{\lambda,0})$ ($\nu = 0$ の場合) を U_λ, σ_λ, $L^2(G,\sigma_\lambda)$ と書くことにする。さて

$$J_\lambda : \text{type } \tau_\lambda \text{ の automorphic factor} \quad (\text{cf. } (2.3))$$

とし、$\mathcal{O}(D,E_\lambda)$, $\mathcal{O}(\bar D,E_\lambda)$ をそれぞれ D, $\bar D$ で正則な E_λ 値関数全体とすれば、(2.4) より $g \in G$ に対し $\mathcal{O}(D,E_\lambda)$ 上での作用 $T_\lambda(g)$ を

$$(T_\lambda(g)F)(z) = J_\lambda(g^{-1},z)^{-1}F(g^{-1}\cdot z), \qquad F \in \mathcal{O}(D,E_\lambda),\ z \in D$$

で定義することができ、$T_\lambda(g_1g_2) = T_\lambda(g_1)T_\lambda(g_2)$ ($g_1, g_2 \in G$) がなりたつ。しかも $\mathcal{O}(\bar D,E_\lambda)$ は $T_\lambda(g)$, $g \in G$, で不変な部分空間である。

E_λ から $E_{\tilde\lambda}$ 上への直交射影を $P_{\tilde\lambda}$ とし、$F \in \mathcal{O}(\bar D,E_\lambda)$ に対し $\tilde F : G \to$

$E_{\tilde\lambda}$ を

(3.3) $\quad \tilde F(g) = P_{\tilde\lambda} J_\lambda(gc_i, 0)^{-1} F(g\cdot o_i)$

で定義する．また S_i の $E_{\tilde\lambda}$ 上での表現 $\sigma_{\tilde\lambda}(=\sigma_{\lambda,0})$ に対し

$$C^\infty(G,\sigma_\lambda) = \left\{ f \in C^\infty(G, E_{\tilde\lambda}) \,;\, f(gs) = \sigma_\lambda(s)^{-1} f(g),\ g\in G,\ s\in S_i \right\}$$

とおけば，G は $C^\infty(G,\sigma_\lambda)$ に左移動として作用する．

(3.4) 補題　$F \in \mathcal{O}(\bar D, E_\lambda)$ に対し $\tilde F$ を (3.3) で定義すれば，$\tilde F \in C^\infty(G,\sigma_\lambda)$．さらに写像 $F \longrightarrow \tilde F$ は G の作用と可換．

$L^2(G,\sigma_\lambda)$ でのノルムと補題(3.4)を考慮に入れ，$\mathcal{O}(\bar D, E_\lambda)$ の seminorm $\|\ \|_\lambda$ を

$$\|F\|_\lambda^2 = \int_{K\times G_i} |P_{\tilde\lambda} J_\lambda(kg_ic_i, 0)^{-1} F(kg_i\cdot o_i)|^2\, dk\, dg_i$$

で定義し，

$$\mathcal{O}^2(\bar D, E_\lambda) = \left\{ F \in \mathcal{O}(\bar D, E_\lambda) \,;\ \|F\|_\lambda < \infty \right\}$$

とおけば，$(U_\lambda, L^2(G,\sigma_\lambda))$ はユニタリ表現だから，補題(3.4)より G の $\mathcal{O}(D,E_\lambda)$ 上での作用 T_λ は，$\mathcal{O}^2(\bar D, E_\lambda)$ を不変にし，しかも seminorm $\|\ \|_\lambda$ を保っている．

注意　B_i 上の G 準不変測度 $d\mu$ を $\int_{B_i} f(u)\,d\mu(u) = \int_{K\times G_i} f(kg_i\cdot o_i)\,dk\,dg_i$ ($f \in C_c(B_i)$) で定義することができるが，このとき上の $\|F\|_\lambda^2$ は，ある $M_\lambda : B_i \to \mathrm{End}(E_\lambda)$ により

$$\|F\|_\lambda^2 = \int_{B_i} (M_\lambda(u)F(u),\ F(u))\, d\mu(u)$$

と書ける．ただし積分記号内の $(\cdot,\cdot)$ は E_λ での内積．

(3.5) 補題　$\mathcal{O}^2(\bar D, E_\lambda)$ 上の seminorm $\|\ \|_\lambda$ は norm である i.e.

$$F\in \mathcal{O}^2(\bar{D},E_\lambda),\ \|F\|_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad F\equiv 0.$$

$\mathcal{O}^2(\bar{D},E_\lambda)$ の norm $\|\ \|_\lambda$ に関する完備化を $H^2(D,\lambda)$ とすれば

<u>(3.6) 補題</u>　$H^2(D,\lambda)$ は $\mathcal{O}(D,E_\lambda)$ の部分空間と同一視でき、$T_\lambda(g)$ $(g\in G)$ で不変.

<u>(3.7) 定理</u>　任意の $\lambda\in \mathcal{F}_i(G)$ $(1\leq i\leq r)$ に対し $H^2(D,\lambda)\neq\{0\}$ で $(T_\lambda, H^2(D,\lambda))$ は G の既約ユニタリ表現、しかも $(U_\lambda, L^2(G,\sigma_\lambda))$ の部分表現とユニタリ同値.

§4　連続系列への埋めこみ

$\tilde{\lambda}$, $E_{\tilde{\lambda}}$ は §3 と同じとし

$$H^2(C_i,\tilde{\lambda}) = \left\{ F\in \mathcal{O}(C_i,E_{\tilde{\lambda}})\ ;\ \int_{G_i} |J_\lambda(g_i c_i,0)^{-1}F(g_i\cdot 0_i)|^2 dg_i < \infty \right\}$$

とおく（C_i は 0_i を通る B_i の holomorphic arc component で $\mathcal{O}(C_i,E_{\tilde{\lambda}})$ は C_i で正則な $E_{\tilde{\lambda}}$ 値関数全体）. $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ は（完備な）Hilbert 空間になっている。（$P_i=M_iA_iN_i$ における）M_i の $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ 上での表現 μ_λ を

$$(\mu_\lambda(m)F)(z) = J_\lambda(m^{-1},z)^{-1}F(m^{-1}\cdot z), \qquad m\in M_i,\ z\in C_i$$

で定義することができる。

<u>(4.1) 補題</u>　$H^2(C_i,\tilde{\lambda})\neq\{0\}$ で $(\mu_\lambda, H^2(C_i,\tilde{\lambda}))$ は既約ユニタリ表現

$\nu\in \mathfrak{a}_i^*$ に対し $P_i=M_iA_iN_i$ の $H^2(C_i,\tilde{\lambda})$ 上での表現 $\mu_\lambda\otimes e^{\sqrt{-1}\nu}\otimes 1$ を $(\mu_\lambda\otimes e^{\sqrt{-1}\nu}\otimes 1)(man) = \mu_\lambda(m)e^{\sqrt{-1}\nu}(a)$, $man\in M_iA_iN_i$, で定義し

$$V_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{M_iA_iN_i \uparrow G}(\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1)$$

とおく．$V_{\lambda,\nu}$ の表現空間を $\mathfrak{H}_{\lambda,\nu}$ とすれば $(V_{\lambda,\nu}, \mathfrak{H}_{\lambda,\nu})$ は §3 における $(U_{\lambda,\nu}, L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}))$ の部分表現とユニタリ同値になることがいえるが，それを述べるため

$$C_2^\infty(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-) = L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}) \cap \{ f \in C^\infty(G, E_\lambda);\ Xf = 0,\ \forall X \in \mathfrak{p}_i^- \}$$

($\mathfrak{p}_i^- = \mathfrak{g}_{i,c} \cap \mathfrak{p}^-$ で，Xf は左不変な複素ベクトル場とみての微分）とおき，この $L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu})$ での閉包を $L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-)$ と記す．これは $U_{\lambda,\nu}$ 不変な部分空間である．

<u>(4.2) 命題</u>　$(V_{\lambda,\nu}, \mathfrak{H}_{\lambda,\nu})$ と $(U_{\lambda,\nu}, L^2(G, \sigma_{\lambda,\nu}; \mathfrak{p}_i^-))$ はユニタリ同値．

$V_{\lambda,0}, \mathfrak{H}_{\lambda,0}$ を $V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda$ と書く．G の放物部分群の表現から誘導される G の表現の既約性に関する Harish-Chandra [2, Lemma 3, p. 145] の判定法を適用すれば $V_{\lambda,\nu} = \mathrm{Ind}_{M_iA_iN_i \uparrow G}(\mu_\lambda \otimes e^{\sqrt{-1}\nu} \otimes 1)$ は今 $\dim A_i = 1$ より $\nu \neq 0$ のときはすべて既約になる（正確には M_i がコンパクト Cartan 部分群を持つ仮定のもとである．しかし，まだ証明は与えられていないようであるが，一般的に成り立つものと思われる）．しかし，例外的な $V_\lambda (= V_{\lambda,0})$ の場合，次のことが成り立つ．

<u>(4.3) 定理</u>　§3 における G の表現 $(T_\lambda, H^2(D, \lambda))$ は $(V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda)$ の真部分表現とユニタリ同値，従って $(V_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda)$ は可約である．

§5 核関数

<u>(5.1) 補題</u> $z \in D$ に対し $E_z : H^2(D,\lambda) \longrightarrow E_\lambda$ を $E_z(F) = F(z)$ で定義すれば、E_z は連続で全射.

補題(5.1)より E_z の adjoint $E_z^* : E_\lambda \longrightarrow H^2(D,\lambda)$ が存在し $\forall F \in H^2(D,\lambda)$, $\forall e \in E_\lambda$ に対し

(5.2a) $\qquad (F(z), e)_{E_\lambda} = (F, E_z^*(e))_{H^2(D,\lambda)}$

をみたす. そこで関数 $K_\lambda : D \times D \longrightarrow \mathrm{End}(E_\lambda)$ を

$$K_\lambda(z,w) = E_z E_w^*, \qquad z, w \in D$$

で定義する. このとき (5.2a) は

(5.2b) $\qquad (F(z), e) = (F(\cdot), K_\lambda(\cdot, z)e)$

と書ける. $K_\lambda(z,w)$ は z に関し正則で $K_\lambda(w,z) = K_\lambda(z,w)^*$ をみたしている. ただし $K_\lambda(z,w)^*$ は $K_\lambda(z,w)$ の adjoint. K_λ を $H^2(D,\lambda)$ の再生核という. (作用素値再生核の一般論およびユニタリ表現との関係については Kunze [7] 参照.)

<u>注意</u> (5.2b) を $H^2(D,\lambda)$ での具体的な内積を用いて表わせば, ある $M_\lambda : B_i \rightarrow \mathrm{End}(E_\lambda)$ が存在し, $F \in \mathcal{O}^2(\bar{D}, E_\lambda)$ に対し

$$F(z) = \int_{B_i} K_\lambda(z,u) M_\lambda(u) F(u)\, d\mu(u), \qquad z \in D$$

の成り立つことが示される. 特に $\dim E_\lambda = 1$ のときは $M_\lambda(u) > 0$ $(\forall u \in B_i)$ となり $d\mu'(u) = M_\lambda(u)\, d\mu(u)$ とおけば, 上の積分は

$$F(z) = \int_{B_i} K_\lambda(z,u) F(u)\, d\mu'(u)$$

と, 測度 $d\mu'(u)$ に関する積分とみなせる.

K_λの具体式を automorphic factor を用いて表わすことができるが、それを述べるためまず次のことに注意する。今Dは$\mathfrak{p}^+$の有界領域として実現されているので$X \longrightarrow \overline{X}$を$\mathfrak{g}_c$の$\mathfrak{g}$に関する共役とすれば、$w \in D$に対し$\exp \overline{w}$は意味をもち$\overline{\mathfrak{p}^+} = \mathfrak{p}^-$よりそれは$P^-(=\exp \mathfrak{p}^-)$に属する。

<u>(5.3) 命題</u>　$H^2(D,\lambda)$の再生核K_λは

$$K_\lambda(z,w) = c(\lambda) J_\lambda(\exp(-\overline{w}), z)^{-1}$$

で与えられる。ただし$c(\lambda)>0$.

ところで§3でも注意したように、Gの適当な有限被覆$\tilde{G}$をとれば、各$i=1,\cdots,r$に対しτ_λが$\tilde{K}$の1次元表現であるような$\lambda \in \mathcal{F}_i(G)$がただ一つ存在することがいえる。いまこの$\lambda$を$\omega_i$とおき$H^2(D,\omega_i)$の核関数を$k_i$と書くことにする。

<u>注意</u>　$H^2(D,\omega_r)$はDの通常のHardy空間に一致し、従ってk_rはDのCauchy-Szegö核関数になる。

これらのk_iについては命題(5.3)における式よりも、もっと具体的な表示が得られ、それらは定数倍を除きDのBergman核関数を何乗かしたものに一致することがいえる。それらを記述するため、まずBergman核関数から始めよう。

$$\mathcal{O}^2(D) = \left\{ f \in \mathcal{O}(D) \, ; \, \|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

(dzは$\mathfrak{p}^+$のEuclid測度)とおけば$\mathcal{O}^2(D)$はHilbert空間で$\forall z \in D$に対し写像$f \longrightarrow f(z)$は$\mathcal{O}^2(D)$上の連続線型汎関数であるゆえ,

$\mathcal{O}^2(D)$ の再生核が存在する．定義によりこの再生核がDのBergman核関数で、今これを b で表わすことにする．次に $\rho_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_n^+}\alpha$ とおいて，$K_{\mathbb{C}}$ の一つの1次元表現 $\tau_{2\rho_n}$ を

$$\tau_{2\rho_n}(k) = \det\left(\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{p}^+}\right), \qquad k\in K_{\mathbb{C}}$$

で定義し（従って $2\rho_n$ は $\tau_{2\rho_n}$ の weight である） $k : D\times D \to \mathbb{C}$ を

(5.4) $$k(z,w) = J_{2\rho_n}(\exp(-\overline{w}), z)$$

で定義する．このとき

<u>(5.5) 命題</u>　Dの Bergman 核関数 b は

$$b(z,w) = \mathrm{vol}(D)^{-1}\, k(z,w)$$

で与えられる．

$H^2(D,\omega_i)$ の核関数 k_i の具体式を記述するうえに次のことに注意する．$k_i(z,w)$ は，z に関し正則 w に関し反正則だから，$D\times D$ の対角線集合上での値のみで完全に定まる．またDの任意の点は $k\cdot(\sum_{j=1}^r t_jX_j) = \mathrm{Ad}(k)(\sum_{j=1}^r t_jX_j)$，$k\in K$，$-1<t_j<1$，と書ける．(cf. Korányi-Wolf [6])．さて $n=\dim_{\mathbb{C}} D$，$n_i = \dim_{\mathbb{C}} C_i$ $d_i = \dim_{\mathbb{R}} B_i$ とおいて

(5.6) $$q_i = \frac{n-n_i}{3n-n_i-d_i}$$
$$p_i = \frac{3n-dr}{r}\cdot q_i = \frac{(3n-dr)(n-n_i)}{r(3n-n_i-d_i)}$$

とおく、ただし $r=\mathrm{rank}\, D$.

<u>注意</u>　$\frac{1}{2}\le q_i<1$ で，p_i は整数または半整数．しかも i が奇数なら

常に整数であることが示される。また g_i, p_i は $D = G/K$ としたとき G の Lie 環の real root の重複度を用いて表わすことができる。

<u>(5.7) 命題</u>　k を(5.4)における関数とするとき $H^2(D,\omega_i)$ の核関数 k_i は

$$k_i(z,w) = c(\omega_i)\, k(z,w)^{g_i}$$

で与えられる($D\times D$ は単連結だから $k(z,w)^{g_i}$ を $k(0,0)^{g_i}=1$ なるように定義できる)。さらに $z = k\cdot(\sum_{j=1}^r t_j X_j)$, $k\in K$, $-1<t_j<1$, とすれば

$$k_i(z,z) = c(\omega_i)\prod_{j=1}^r (1-t_j^2)^{-p_i}$$

<u>注意</u>　$n_r = \dim_{\mathbb{C}} C_r = 0$ より $p_r = \frac{n}{r}$ となる。またすでに注意したように $i=r$ のとき k_r は D の Cauchy-Szegö 核関数である。命題(5.7)の第2式における $k_r(z,z)$ の式は Korányi [5, Prop. 5.7] により type II の Siegel 領域での Gindikin [1] の結果を Cayley 変換で有界領域にうつすことにより初めて得られた。

<u>例</u>　個々の D に対し核関数 k_i の具体式がどのように得られるか示すため、次の D で例示しよう。$p\geq q\geq 1$ に対し $D=\{z\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_q - z^*z>0\}$ とする(">0"は行列が正定値を意味する)。この D に対し $B_i=\{z\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_q - z^*z\geq 0,\ \mathrm{rank}(1_q-z^*z)=q-i\}$ で、$C_i = \left\{\begin{bmatrix}1_i&0\\0&z\end{bmatrix}\in M_{p,q}(\mathbb{C})\,;\ 1_{q-i}-z^*z>0\right\}$ とおくことができる。従って $\dim_{\mathbb{C}} D = pq$, $\dim_{\mathbb{C}} C_i=(p-i)(q-i)$, $\dim_{\mathbb{R}} B_i = 2pq - i^2$.

またこの D は $\mathrm{rank}\, D = q$ で $G = SU(p,q)$, $K = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix};\ a \in U(p),\ d \in U(q),\ (\det a)(\det d) = 1\right\}$ に対し $D = G/K$ と表わされる．このとき $G_{\mathbb{C}} = SL(p+q, \mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix};\ a \in GL(p, \mathbb{C}),\ d \in GL(q, \mathbb{C}),\ (\det a) \times (\det d) = 1\right\}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix};\ \mathrm{trace}\, a + \mathrm{trace}\, d = 0\right\}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix};\ b \in M_{p,q}(\mathbb{C}),\ c \in M_{q,p}(\mathbb{C})\right\}$ で，$\mathfrak{p}^+ = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathfrak{p}^- = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}\right\}$ とおくことができる．従って $P^+ = \left\{\begin{bmatrix} 1_p & b \\ 0 & 1_q \end{bmatrix}\right\}$, $P^- = \left\{\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ c & 1_q \end{bmatrix}\right\}$ となる．

$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ は $P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ の分解に応じて

$$g = \begin{bmatrix} 1_p & bd^{-1} \\ 0 & 1_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ d^{-1}c & 1_q \end{bmatrix}$$

と一意的に表わされる。従って §2 の記号を用いれば $\zeta(g) = \begin{bmatrix} 0 & bd^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり G/K の $\mathfrak{p}^+$ の有界領域としての実現は

$$D = \zeta(G) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}^+;\ 1_q - z^*z > 0\right\}$$

となる．以下 $D \subset \mathfrak{p}^+$ としておく．$\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D$ に対し $z' = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $w' = \begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば $\overline{w'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w^* & 0 \end{bmatrix}$ （bar は $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$ の $\mathfrak{su}(p,q)$ に関する共役）より

$$\begin{aligned} &\pi_0(\exp(-\overline{w'}) \exp z') \\ &\quad \equiv \begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ -w^* & 1_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1_p & z \\ 0 & 1_q \end{bmatrix} \text{ の } P^+K_{\mathbb{C}}P^- \text{ の分解における } K_{\mathbb{C}} \text{ 成分} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 1_p + z(1_q - w^*z)^{-1}w^* & 0 \\ 0 & 1_q - w^*z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ところで $k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$ とすれば

$$\tau_{2\rho_n}(k) \equiv \det\left(Ad(k)|_{\mathfrak{p}^+}\right) = (\det a)^q (\det d)^{-p} = (\det d)^{-(p+q)}$$

より

$$J_{2\rho_n}(\exp(-\overline{w'}) \exp z') \equiv \tau_{2\rho_n}(\pi_0(\exp(-\overline{w'})\exp z')) = \det(1_q - w^*z)^{-(p+q)}$$

命題(5.5)によれば、これは定数倍を除いてDのBergman核関数である。さて(5.6)におけるg_iは今の場合$\frac{p+q-i}{p+q}$となる。従って$\mathfrak{p}^+$と$M_{p,q}(\mathbb{C})$を同一視しておけば、命題(5.7)より核関数k_iは

$$k_i(z,w) = c(\omega_i)\cdot \det(1_q - w^*z)^{-(p+q-i)}$$

となる。特に$i=q$の場合k_qはDのCauchy-Szegö核関数で

$$k_q(z,w) = c(\omega_q)\cdot \det(1_q - w^*z)^{-p}$$

で与えられる

<u>注意</u> 定数$c(\omega_i)$は測度のnormalizationに依存している。

§6 Intertwining operator

$$\mathcal{O}(G,\tau_\lambda) = \left\{ f \in C^\infty(G,E_\lambda) \; ; \; \begin{array}{l} f(gk) = \tau_\lambda(k)^{-1} f(g), \; g\in G, k \in K \\ Xf = 0, \; \forall X \in \mathfrak{p}^- \end{array} \right\}$$

とおく。$F \in \mathcal{O}(D,E_\lambda)$に対し$I_\lambda F : G \to E_\lambda$を$(I_\lambda F)(g) = J_\lambda(g,0)^{-1}F(g\cdot 0)$で定義すれば、$I_\lambda F \in \mathcal{O}(G,\tau_\lambda)$となり写像$I_\lambda : \mathcal{O}(D,E_\lambda) \to \mathcal{O}(G,\tau_\lambda)$は全単射である。そこで

$$H^2(G,\tau_\lambda) = I_\lambda(H^2(D,\lambda))$$

とおき、I_λがユニタリ同値になるように$H^2(G,\tau_\lambda)$に内積を入れればGの左移動により$(T_\lambda, H^2(D,\lambda))$とユニタリ同値なGの表現が$H^2(G,\tau_\lambda)$上で得られる。

さて$(U_\lambda, L^2(G,\sigma_\lambda))$を定理(3.7)におけるユニタリ表現とする。$\varphi \in L^2(G,\sigma_\lambda)$, $g \in G$に対し

$$(6.1)\qquad (\mathcal{P}_\lambda\varphi)(g) = \int_{K\times G_i} \tau_\lambda(k) J_\lambda(g_i^{-1}, 0)^{-1}\varphi(gkg_i)\,dk\,dg_i$$

とおく.

<u>(6.2) 補題</u>　任意の $\varphi\in L^2(G,\sigma_\lambda)$ と $g\in G$ に対し $(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(g)$ は存在し

$$(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(g) = \int_{K\times G_i} J_\lambda^*(g^{-1}kg_i, 0_i)^{-1}\varphi(kg_i)\,dk\,dg_i$$

と表わされる、ただし $J_\lambda^*(\cdot,\cdot)^{-1}$ は $J_\lambda(\cdot,\cdot)^{-1}$ の adjoint.

<u>(6.3) 定理</u>　(1) 任意の $\varphi\in L^2(G,\sigma_\lambda)$ に対し (6.1) で定義される $\mathcal{P}_\lambda\varphi$ は $H^2(G,\tau_\lambda)$ に属する. さらに $\mathcal{P}_\lambda : L^2(G,\sigma_\lambda)\longrightarrow H^2(G,\tau_\lambda)$ は上への G-intertwining operator である.

(2) $L^2(G,\sigma_\lambda)$ の部分空間 $L^2(G,\sigma_\lambda;\mathcal{P}_i^-)$ (cf. 命題 (4.2)) の上では $\mathcal{P}_\lambda$ は

$$(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(g) = \beta(\lambda)\int_K \tau_\lambda(k)\varphi(gk)\,dk$$

で与えられる.

<u>注意</u>　$\lambda\in\mathcal{F}_r(G)$ のときは $L^2(G,\sigma_\lambda) = L^2(G,\sigma_\lambda;\mathcal{P}_r^-)$ となる. 特に λ が §5 における w_r のとき $H^2(D,\lambda)$ は D の普通の Hardy 空間で、$L^2(G,\sigma_\lambda)$ は Silov 境界 B_r の K 不変な測度に関する $L^2(B_r)$ と、対応 $L^2(B_r)\ni f\longrightarrow\varphi\in L^2(G,\sigma_\lambda)$, $\varphi(g) = J_\lambda(gc_r, 0)^{-1}f(g\cdot 0_r)$, により一対一に対応している. $f\in L^2(B_r)$ に対し $\mathcal{S}f$ を f の Cauchy-Szegö 積分 i.e.

$$(\mathcal{S}f)(z) = \int_{B_r} k_r(z,u)f(u)\,d\mu(u),\qquad z\in D$$

($k_r(z,u)$ は D の Cauchy-Szegö 核関数) とすれば

$$\mathcal{S} : L^2(B_r)\longrightarrow H^2(D,\lambda)$$

であるが、このとき図式

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(G, \sigma_\lambda) & \xrightarrow{\mathcal{S}_\lambda} & H^2(G, \tau_\lambda) \\
\wr\wr & & \wr\wr \\
L^2(B_r) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & H^2(D, \lambda)
\end{array}
$$

は可換になっている。

References

[1] S.G. Gindikin: Analysis in homogeneous domains, Russian Math. Surveys 19 (1964), 1–89.

[2] Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. 104 (1976), 117–201.

[3] T. Inoue: Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain, (to appear).

[4] A.W. Knapp and K. Okamoto: Limits of holomorphic discrete series, J. Functional Analysis 9 (1972), 375–409.

[5] A. Koranyi: The Poisson integral for generalized half-plaines and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 82 (1965), 332–350.

[6] A. Koranyi and J.A. Wolf: The realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-plaines, Ann. of Math. 81 (1965), 265–288.

[7] R.A. Kunze: Positive definite operator-valued kernels and unitary representations, in "Proceeding of the Conference on Functional Analysis", Thompson Book Company, 1967.

[8] H. Rossi and M. Vergne: Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math. 136 (1976), 1–59.

[9] J.A. Wolf and A. Koranyi: Generalized Cayley transformations of bounded symmetric domains, Amer. J. Math. 87 (1965), 899–934.